# Ejercicios Epistemológicos

**Christhopher Mena Cerna**

July 18, 2015

# Ejercicios Epistemológicos

1. Dados dos segmentos $a$ y $b$, constrúyanse con regla y compás una solución $x$ de la ecuación $x^2 = ax + b^2$.

2. Utilícese el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de 456 y 759.

3. ¿Cuál es la mayor unidad de medida común para dos segmentos de longitudes $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{7}$ respectivamente? ¿Y para dos segmentos de longitudes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ respectivamente, con $a$, $b$, $c$, $d$, números naturales primos entre sí?

4. El número $2^{13} - 1$ es primo, Utilícese este hecho para calcular el quinto número perfecto en el orden creciente natural.

5. Escríbase el número 12.345.678.987.654.321 en el sistema de Apolonio.

6. Si un diámetro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene pendiente $m$, calcúlese la pendiente de su diámetro conjugado.

7. Determine las coordendas de los pies de las cuatro normales que se pueden trazar desde el punto $(1, 0)$ a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

8. ¿Para qué valores de $K$ pueden trazarse cuatro normales des el punto $(K, 0)$ a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

9. Calcule el $\sin(15°)$, sin tablas, y a partir de él escriba en notación alfabética griega el valor dado por Ptolomeo para la cuerda de 30°.

10. Demuestre el teorema de de Aristarco que dice que si $\beta < \alpha < 90°$, entonces $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)} < \dfrac{\alpha}{\beta}$

11. Demuestre las fórmulas para $\sin(x+y)$ y $\cos(x+y)$, utilizando el teorema de Ptolomeo.

12. Utilice el método de Ptolomeo para los ángulos mitad, para obtener una fórmula para $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

13. Demuestre que la cúbica de Fibonacci, $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, no tienen ninguna raíz racional.

14. Resuelva la suma de Calculator de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

15. Compruebe la suma de Oresme de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4^n}$

16. Reducir la solución de la cuártica de Ferrari $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ a la solución de una ecuación cúbica.

17. Compruebe la afirmación de Bombelli de que $4 + \sqrt{-1}$ es una raíz cúbica de $52 + \sqrt{-2209}$

18. Demuestre, utilizando el método de Viète, que

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

19. Demuestre la afirmación de Galilio de que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$

20. Compruebe la fórmula de Wallis

$$\int_0^1 (x - x^2)^n \, dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

, para $n = 1, 2, 3,$ y 4.

21. Hallar la evoluta de la paábola $y^2 = 2x$

22. Hallar las dos rectas contenidas en el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, que pasan por el punto $(1, 2, 2)$.

23. Demuestre, utilizando el método de Leibniz, que

$$d\left(\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$$

24. Utilice el método de Newton de inversión de series para obtener los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de $e^x$ a partir de

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

25. Utilice la regla de L'Hospital para calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$$

siendo $c \neq d$

26. Haga los cálculos necesarios para demostrar que el área bajo la curva $y = x^x$, desde $x = 0$ a $x = 1$, viene dada por la serie

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

27. Demuestre que la integral $\displaystyle\int x^p (1-x)^q \, dx$ es una función elemental si $p$ o $q$ o $p + q$ son enteros.

28. Demuestre que la integral

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

se puede reducir a una de las formas de Lengendre, por medio de la sustitución $x = \sin(t)$

29. Complemente los detalles de la demostración de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

30. Demuestre que la inversa de una parábola no es una parábola.

31. Utilice el método de los operadores diferenciales de Boole para resolver la ecuación diferencial $y'' + 3y' + 2y = 0$

32. Si una transformación lineal fraccionaria

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

satisface la condición $ad - bc = 1$, demuestre que la transformación inversa también satisface esta condición.

[0]Christhopher Mena Cerna